Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: ……………………………….....Nombres:………………………………………………

Padrón:………………………

1. Sea el campo escalar $f(x,y,z)=3y^2$. Calcular el flujo de ∇f a través de la superficie frontera del sólido $W=\{(x,y,z)\in\Re^3 : z^2+y^2\le 4; x\ge 0; x+z\le 8\}$ Indicar en un gráfico el sentido de orientación utilizada para la normal a la superficie.

2. Sea $\vec{F}:\Re^3 \to \Re^3 / \vec{F}_{(x,y,z)}=(yz+k.xy\,,xz+3x^2\,,xy)$
   a) Hallar k de forma que $\overline{F}$ sea irrotacional.
   b) Mostrar que la circulación de $\overline{F}$ desde el punto (-3,2,0) hasta cualquier punto de la curva $C=\{(x,y,z)\in\Re^3 : z+3x=54\,;xy=\frac{8}{9}\,;\ x>0\}$ es igual a -6, para el valor de k hallado en el item a).

3. Calcular $\iint_\Sigma \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS$,

   siendo Σ la porción de superficie $z=x^2+y^2$ con $z\le 2$; $y\ge x$; $x\ge 0$.

4. Sea el campo $\vec{F}(x,y)=(3x^2-\ln(x^2+y^2)\,,\ y^3+\ln(x^2+y^2))$. Hallar la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de la frontera de la región $D=\{(x,y)\in\Re^2 : x+y\le 10\,;\ x^2+y^2\ge 4\,;\ x\ge 0\,;\ y\ge 0\}$ indicando en un gráfico el sentido de orientación utilizado.

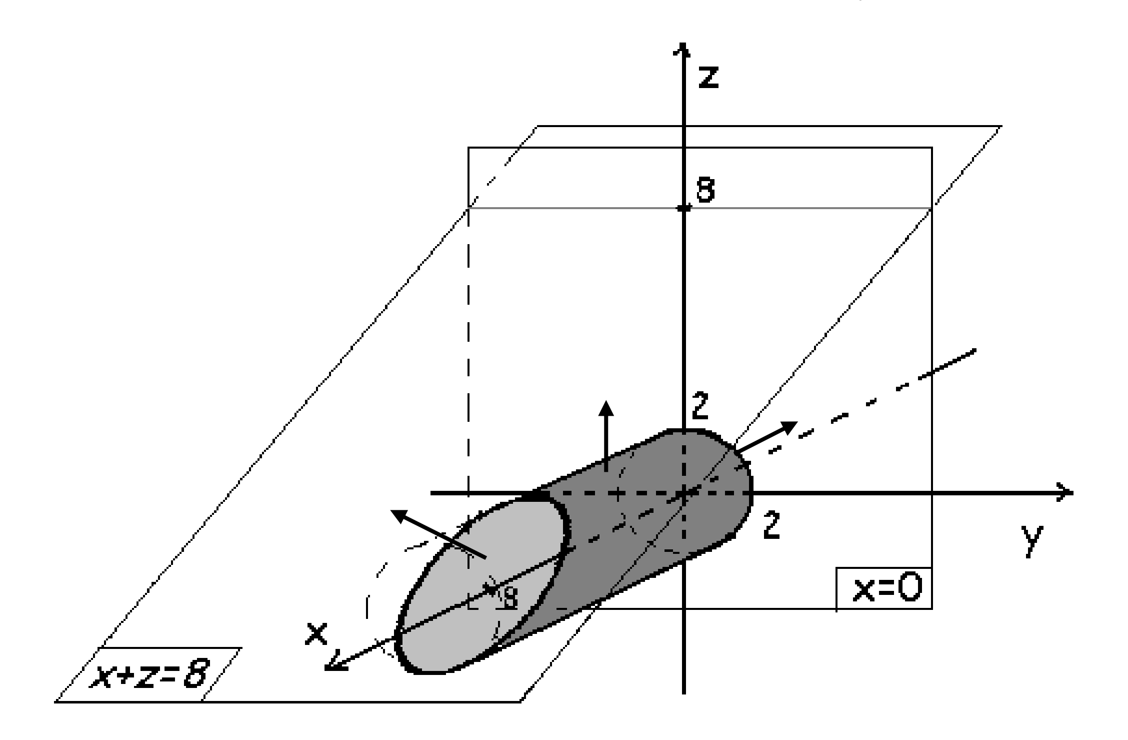
5. Sea C la curva solución del problema de valores iniciales $y'=\frac{2x-y}{x}$, $y(1)=1$.
   a) Hallar la curva *C*.
   b) Encontrar el mínimo absoluto de $f(x,y)=(x-2)^2+y^2$ restringida a *C*.

1. **Sea el campo escalar f(x,y,z) = 3y². Calcular el flujo del ∇f a través de la superficie frontera del sólido W= {(x,y,z) ε R³ : z²+ y² ≤ 4 ; x ≥ 0 ; x + z ≤ 8}. Indicar en un gráfico el sentido de orientación utilizada para la normal a la superficie.**

Analizo la forma de W (la intersección de las superficies que lo envuelven):

$$\begin{cases} z^2+y^2=4 \ \rightarrow \ \text{cilindro, radio } 2 \ con\ eje = eje\ 'x' \\ x=0 \quad \rightarrow plano\ yz \\ x+z=8 \ \rightarrow plano\ x=8-z \quad (y\ libre) \end{cases}$$

Dibujo la intersección de esas superficies:



Por los datos del enunciado conocemos los límtes de **x**: 0 ≤ x ≤ 8 - z

Sea $\vec{F}_{(x,y,z)} = \nabla f_{(x,y,z)} = (0,6y,0)$

Como piden calcular el flujo en un campo R³, voy a analizar si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Gauss:
Sea **S** la superficie frontera de **W**

- ✓ W es una región compacta de $\Re^3$ cuya frontera S está orientada hacia el exterior (ver normal dibujada en el gráfico)
- ✓ $\vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\ donde\ P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}\ y\ R_{(x,y,z)} \in C^{\infty}(\Re^3)\ pues son\ polinomios$

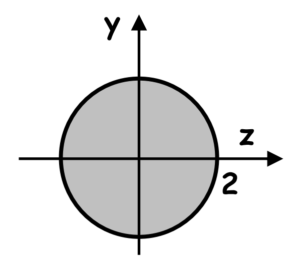
$$\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^3) \ \rightarrow \ \vec{F} \in C^{1}(\Re^3)$$

Se cumplen las hipótesis, por lo tanto:

$$\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = \iiint_W div.\vec{F}.dvol = \iiint_W (0+6+0).dvol = 6\iiint_W dx.dy.dz =$$

Por la forma que tiene W conviene hacer un cambio de variables a cilíndricas:

Proyección de W
sobre el plano yz



$$\vec{\sigma}_{(x,r,t)} = (x, r.sen(t), r.\cos(t))$$

$$0 \le r \le 2 \ , \ 0 \le t \le 2\pi$$

$$0 \le x \le 8 - z \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 8 - r.\cos(t)$$

$$Jacobiano = r$$

Entonces:

$$\overset{\substack{cambio \\ variable}}{=} 6\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{8-r.\cos(t)} \overset{jac.}{r}\,.dx.dr.dt = 6\int_0^{2\pi}\int_0^2 r(8-r.\cos(t)).dx.dr.dt = 6\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(8r - r^2.\cos(t)\right).dr.dt =$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\left(4r^2 - \frac{r^3}{3}.\cos(t)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}.dt = 6\int_0^{2\pi} 8\left(2 - \frac{1}{3}.\cos(t)\right).dt = 48\int_0^{2\pi} 2 - \frac{1}{3}.\cos(t).dt = 192\pi$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}.d\bar{s} = 192\pi}$$

2. Sea $\vec{F}:\Re^3 \to \Re^3 / \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(yz + k.xy, xz + 3x^2, xy\right)$

a) Hallar *k* de forma que F sea irrotacional.

$\vec{F}$ *es irrotacional* $\Rightarrow rot.\vec{F} = \bar{0} = (0,0,0)$

$rot.\vec{F} = (x - x, y - y, z + 6x - z - kx) = (0,0,0) \Rightarrow 6x - kx = 0 \to 6x = kx \to \boxed{k = 6}$

Además, dom($\vec{F}$) = R^3 → es un conjunto abierto y simplemente conexo √

y $\vec{F}:\Re^3 \to \Re^3 con\ \vec{F}_{(x,y,z)} = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right),\ donde\ P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}\ y\ R_{(x,y,z)} \in C^{\infty}(\Re^3)$

por ser suma algebraica de polinomios $\therefore \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^3) \to \vec{F} \in C^1(\Re^3)$ √

Por lo tanto, $\vec{F}$ es un campo conservativo.

b) Mostrar que la circulación de $\vec{F}$ desde el punto (-3,2,0) hasta cualquier punto de la curva C={(x,y,z) ε R^3 : z + 3x = 54 , xy = 8/9 , x > 0} es igual a -6, para el valor de *k* hallado en el item a).

Tengo que hallar la circulación de **A = (-3,2,0)** a **B**, donde B es cualquier punto de la curva C.

Para hallar B, voy a parametrizar la curva C:

$$C: \begin{cases} z + 3x = 54 \to z = 54 - 3x \\ xy = \dfrac{8}{9} \xrightarrow{x \neq 0} y = \dfrac{8}{9x} \end{cases} \to C: \bar{\alpha}_{(t)} = \left(t, \frac{8}{9t}, 54 - 3t\right)\ ;\ t \in \Re_{>0}$$

Como $\vec{F}$ es un campo conservativo, entonces $\exists \varphi : \Re^3 \to \Re : \vec{F} = \nabla\varphi$ siendo φ la función potencial de $\vec{F} \therefore \int_C \vec{F}.d\bar{l} = \varphi_{(B)} - \varphi_A$

Busco la función potencial:

$$\vec{F} = (P,Q,R) = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(yz + 6.xy, xz + 3x^2, xy\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz + 6.xy \xrightarrow{integro\ X\ m.a.m} \underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2y + \delta_{(y,z)}}$$

$\downarrow$ *derivo con respecto a Y*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + 3x^2 \quad (1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz + 3x^2 + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \underset{(1)}{=} xz + 3x^2 \to \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0 \to \delta_{(y,z)} = \beta_{(z)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy \quad (2) \qquad \underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2y + \beta_{(z)}}$$

$\downarrow$ *derivo con respecto a Z*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy + \beta'_{(z)} \underset{(2)}{=} xy \to \beta'_{(z)} = 0 \to \beta_{(z)} = K\ ;\ K \in \Re$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$\varphi_{(x,y,z)} = xyz + 3x^2y + K\ ;\ (K \in \Re)$$

Como llamé B a un punto cualquiera que pertenece a la curva *C*, va a tener la forma de $B=\left(t,\frac{8}{9t},54-3t\right)\ ;\ t\in\Re_{>0}$

Entonces, sea *C** la curva que une a *A*=(-3,2,0) con cualquier punto de la curva *C*:

$$\int_{C^*}\vec{F}.d\bar{l}=\varphi_{(B)}-\varphi_{(A)}=\varphi_{\left(t,\frac{8}{9t},54-3t\right)}-\varphi_{(-3,2,0)}=\left(t.\frac{8}{9t}.(54-3t)+3.t^2.\frac{8}{9t}\right)-\left(-3.2.0+3.(-3)^2.2\right)=$$

$$=\left(\frac{8}{9}.(54-3t)+t\frac{8}{3}\right)-(54)=48-\frac{8}{3}t+\frac{8}{3}t-54=-6$$

Por lo tanto, para todas las curvas que unen a *A*=(-3,2,0) con *C*, que llamé *C**:

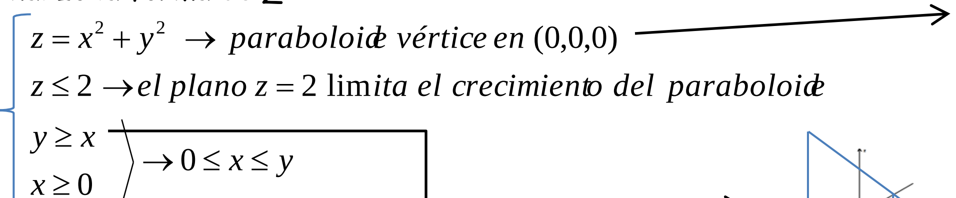
$$\int_{C^*}\vec{F}.d\bar{l}=-6$$

3. Calcular

$$\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS$$

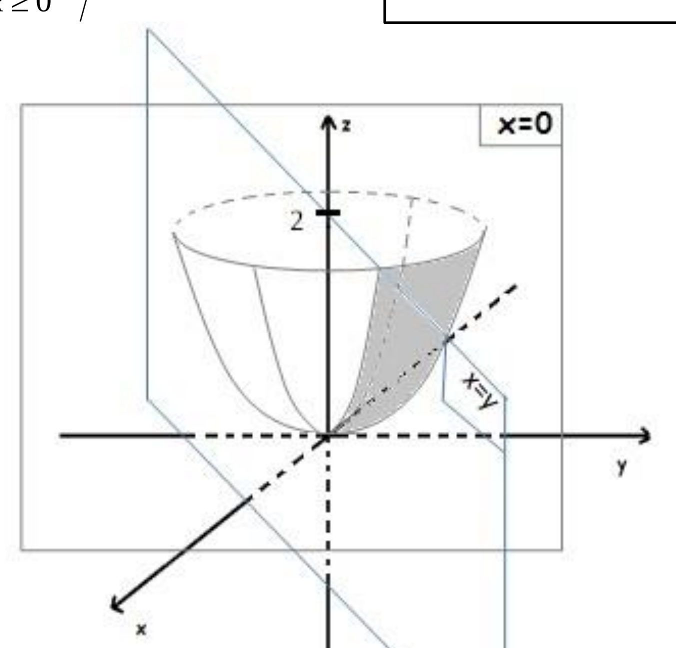
Siendo ∑ la porción de superficie de z = x2 + y2 , con z ≤ 2 ; y ≥ xx ; x ≥ 0.

Analizo la forma de ∑:

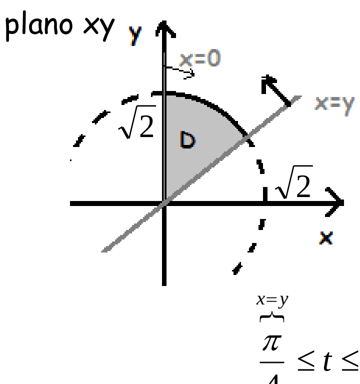

$z = x^2 + y^2 \rightarrow$ *paraboloide vértice en* $(0,0,0)$

$z \le 2 \rightarrow$ *el plano* $z = 2$ *limita el crecimiento del paraboloide*

$\left.\begin{matrix} y \ge x \\ x \ge 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 0 \le x \le y$



Proyección de ∑ sobre el plano xy



$$\overbrace{\frac{\pi}{4}}^{x=y} \le t \le \overbrace{\frac{\pi}{2}}^{x=0}$$

$$0 \le x \le \sqrt{2}$$

Parametrizo la superficie de ∑:

$\bar{\delta}_{(x,y)} = (x, y, \overbrace{x^2+y^2}^{z})$

$\bar{\delta}'_x = (1,0,2x)$

$\bar{\delta}'_y = (0,1,2y)$ →N=(2x,2y,-1)→ $\|N\| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$

Entonces:

$$\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \mathrm{dS} = \iint_{D} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \overbrace{\|N\|.\,dx.\,dy}^{dS} =$$

$$= \iint_{D} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} . \sqrt{1+4x^2+4y^2}.\,dx.\,dy = 2\iint_{D} dx.\,dy$$

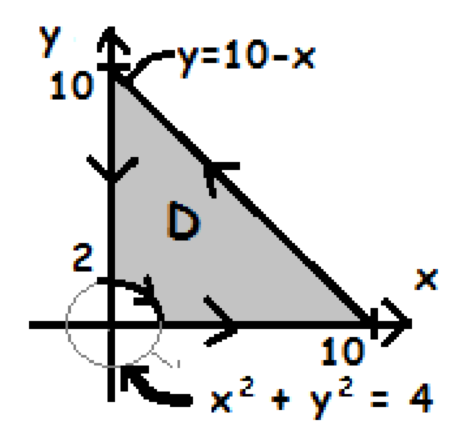
$$\overset{\substack{cambio \\ variable}}{=} 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\sqrt{2}} \overset{jac.}{\widehat{r}}\ .\,dr.\,dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{0}^{\sqrt{2}} dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.dS = \frac{\pi}{2}}$$

4. Sea el campo $\vec{F}$ (x,y)= ($3x^2$ – $\ln(x^2 + y^2)$, $y^3 + \ln(x^2 + y^2)$).
Hallar la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la frontera de la región D={(x,y) ε R^2 : x + y ≤ 10 ; $x^2 + y^2 \geq 4$; x ≥ 0 ; y ≥ 0} indicando en un gráfico el sentido de orientación utilizado.

Analizo la forma de D (a través de sus bordes):

$$\begin{cases} x + y = 10 \rightarrow recta\ \ y = 10 - x \\ x^2 + y^2 = 4 \ \rightarrow \ circunferencia\ radio\ 2 \\ \quad\quad centrada\ en\ el\ origen \\ x \geq 0\ ;\ \ y \geq 0 \rightarrow primer\ cuadrante \end{cases}$$



Como piden calcular la circulación de un campo $R^2 \rightarrow R^2$ analizo si se cumplen las hipótesis necesarias para utilizar el Teorema de Green.

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave (a trozos)
- ✓ $\vec{F}: \Re^2 \rightarrow \Re^2 con\ \vec{F}_{(x,y)} = \left(P_{(x,y)}, Q_{(x,y)}\right),\ \ donde\ \ P_{(x,y)}\ y\ Q_{(x,y)} \in C^{\infty}(\Re^2)$

$$pues\ son\ sumas\ algebraicas\ de\ \ funciones elementales \rightarrow \vec{F} \in C^{\infty}(\Re^2) \rightarrow \vec{F} \in C^{1}(\Re^2)$$

Como se cumplen las hipótesis del T. Green puedo decir que:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = \iint_D \left(Q'_X - P'_Y\right) dx.dy$$

$$\left.\begin{aligned} P_{(x,y)} &= 3x^2 - \ln\left(x^2 + y^2\right) \rightarrow P'_Y = -\ \frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)} \\ Q_{(x,y)} &= y^3 + \ln\left(x^2 + y^2\right) \rightarrow \ Q'_X = \frac{2x}{\left(x^2 + y^2\right)} \end{aligned}\right\rangle Q'_X - P'_Y = \frac{2(x+y)}{\left(x^2 + y^2\right)}$$

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 2\iint_D \frac{x+y}{x^2 + y^2} dx.dy$$

Por la forma que tiene D conviene trabajar la integral con coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.\text{sen}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \quad\quad \text{Jacobiano= r}$$

Para ver cómo varía *r* veo la forma de D y observo que va desde la circunferencia de radio 2 (o sea, desde r=2) hasta la recta y=10-x.

Y esa recta, en coordenadas polares es : r.sen(t)=10-r.cos(t) → r.sen(t)+r.cos(t)=10 →

➔ r(cos(t)+sen(t))=10 ; como cos(t)+sen(t)=0 ocurre en t= - π/4 o en t= 3 π /4… y como esos valores de t NO pertenecen al intervalo a integrar entonces puedo afirmar que cos(t)+sen(t) ≠ 0, por lo tanto : r(cos(t)+sen(t))=10 → r = 10 / (cos(t)+sen(t))

límites de r : $\quad 2 \leq r \leq \dfrac{10}{(\cos(t) + sen(t))}$

Entonces:

$$\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 2\iint_D \frac{x+y.}{x^2+y^2}dx.dy \underbrace{=}_{\text{cambio variable}} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{\frac{10}{\cos(t)+sen(t)}} \overbrace{r}^{Jac.} \frac{\overbrace{r(\cos(t)+sen(t))}^{x+y}}{\underbrace{r^2}_{x^2+y^2}} dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{\frac{10}{\cos(t)+sen(t)}} (\cos(t)+sen(t))dr.dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+sen(t))\left(\frac{10}{(\cos(t)+sen(t))}-2\right)dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (10-2(\cos(t)+sen(t))).dt == 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5-(\cos(t)+sen(t))).dt = \frac{20.\pi}{2} - 8 = 10\pi - 8$$

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{F}.d\bar{l} = 10\pi - 8}$$

5. Sea C la curva solución del problema de valores iniciales $y'=\dfrac{2x-y}{x};\ y_{(1)}=1$

a) Hallar la curva C

Analizo la forma de D (a través de sus bordes):

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x} \quad\rightarrow\quad x.dy=(2x-y).dx$$

Si la trabajo como la ecuación (2x-y) dx + (-x).dy = 0 y la considero como $P_{(x,y)} + Q_{(x,y)} = 0$, se puede resolver como una ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA, pues P 'y = Q ' x = -1

Busco su función potencial (que define a y implícitamente):

$$P_{(x,y)}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x-y \xrightarrow{\text{integro m.a.m.}} \varphi_{(x,y)}=x^2-xy+\alpha_{(y)}$$

$$Q_{(x,y)}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-x \ ^{(1)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-x+\alpha'_{(y)}\overset{(1)}{=}-x\rightarrow\alpha'_{(y)}=0\rightarrow\alpha_{(y)}=K;(K\in\Re)$$

Por lo tanto, la función potencial es: $\varphi_{(x,y)}=x^2-xy+K$

Entonces: $x^2-xy=-K$ *es solución* $\rightarrow y=\dfrac{x^2+K}{x}$

Evalúo en las condiciones iniciales: $y_{(1)} = 1$ ➔ x = y = 1

$$1=\frac{1^2+K}{1} \quad\rightarrow\quad K=0 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{x^2+\overset{K}{0}}{x}=x \quad\rightarrow\quad y=x$$

Por lo tanto: **C: y = x**

b) Encontrar el mínimo absoluto de f(x,y) = $(x-2)^2 + y^2$ restringido a C.

C: y = x

Parametrizo la restricción: $\overline{\alpha}_{(t)}=(t,t);\ t\in\Re$

Busco los puntos críticos de la función evaluada en la restricción:

Sea h: R → R; $h_{(t)} = f_{(\alpha(t))}$ ➔ $h_{(t)} = f_{(t,t)} = (t-2)^2 + t^2 = t^2 -4t + 4 + t^2 =$ **$2t^2 - 4t + 4 = h_{(t)}$**

Busco los puntos críticos, derivando la función e igualándola a 0.

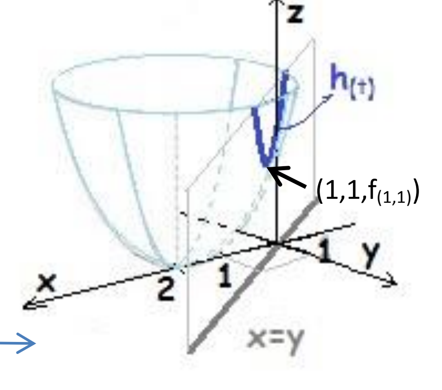
$h'_{(t)} = 4t - 4 = 0$ → 4t = 4 → t = 1 → $\alpha_{(1)} = PC_1 = (1,1)$

El único P.C. hallado es el (1,1).

Analizo la segunda derivada y evalúo si es máximo o mínimo:

$h''_{(t)} = 4 > 0$ → Mínimo relativo y absoluto.

Gráficamente, se puede observar que f(x,y) = z =$(x-2)^2 + y^2$ es un paraboloide con vértice en (2,0,0) y la restricción es una recta. O sea que la h(t) es una parábola



➔ f restringida a C encuentra su mínimo absoluto en el punto (1,1) y toma valor de 2.

¡¡ EXITOS PARA EL EXÁMEN !!

"Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo." (Albert Einstein)

(si ven algún error, algo no está muy claro o está mal explicado, por favor escríbanme un mail a sylvina64@gmail.com así lo corrijo)